Interprétation symbolique de la fonction génératrice en théorie des invariants

Guillaume Dhont, Boris Zhilinskií
Laboratoire de Physico–Chimie de l'Atmosphère,
Bât. MREI2, Université du Littoral Côte d'Opale,
189A avenue Maurice Schumann, 59140 Dunkerque

De nombreuses molécules admettent un groupe ponctuel de symétrie G non trivial dans leur configuration d'équilibre. L'étude de tels systèmes amène à construire des objets appartenant à une représentation irréductible Γ_2 de G à partir de variables élémentaires appartenant à une représentation Γ_1, réductible en général. Les objets ainsi générés sont souvent exprimés sous une forme polynomiale. Le problème posé ici est alors de trouver et caractériser l'ensemble des polynômes susceptibles d'apparaître dans ce développement polynomial.

La fonction génératrice de Molien est un outil pertinent pour ce travail. Elle se calcule directement à partir de la représentation matricielle de l'action du groupe sur les objets élémentaires et des caractères de la représentation irréductible Γ_2. Le coefficient de degré n dans le développement en série de cette fonction donne le nombre de polynômes linéairement indépendants de degré n qui se transforment selon Γ_2.

Cette fonction de Molien peut se mettre sous la forme d'une ou plusieurs fonctions rationnelles. Nous discuterons dans cet exposé de l'interprétation symbolique de cette fonction génératrice à l'aide d'exemples concrets. Nous commencerons par des rappels sur le cas classique des invariants de groupes finis pour terminer avec le cas des covariants de groupes continus compacts illustré par le groupe $\mathrm{SO}(2)$.